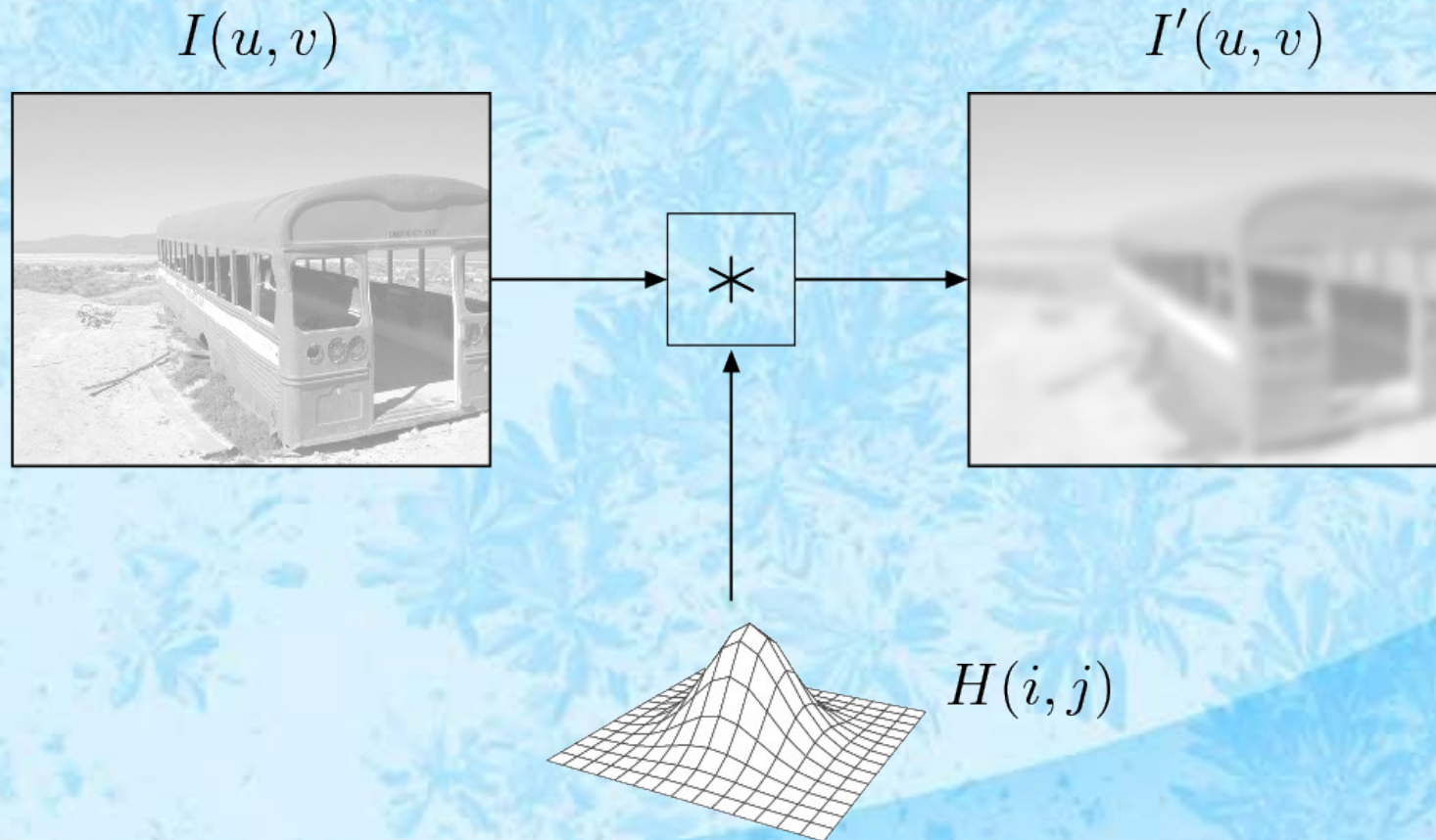


Filtri Lineari e Point Spread Function

Filtri lineari e PSF

- Formulazione convolutiva



Filtri Lineari: Forma Convolutiva

I filtri lineari sono caratterizzati dall'espressione

$$I'(u, v) = \sum_{i=-R}^R \sum_{j=-R}^R I(u+i, v+j) \cdot H(i, j)$$

In questa espressione la trasformazione del pixel con coordinate (u, v) viene eseguita con una somma di prodotti controllata dalla matrice H del filtro

Nel caso dei filtri di smoothing la matrice H è sempre simmetrica rispetto all'*hot-spot* della matrice

Per questa classe di matrici la doppia somma può essere eseguita invertendo il segno degli indici (i, j) che equivale a cambiare l'espressione da una forma correlativa ad una convolutiva

Nelle slide successive si dimostra questa equivalenza in una serie di passaggi algebrici dove si fa uso della proprietà di simmetria della matrice H

Filtri lineari e PSF

- Modello convolutivo
 - L'espressione della convoluzione della matrice H con la matrice I dell'immagine si scrive

$$I'(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i, j)$$

Filtri lineari e PSF

La doppia sommatoria con indici che vanno all'infinito non deve spaventare o sorprendere

- La somma di fatto si interrompe al di fuori del supporto della matrice, cioè al di fuori della regione R_H dove degli elementi di H sono diversi da zero (i prodotti sono tutti nulli al di fuori di essa)
- E' in definitiva solo una generalizzazione matematica

Filtri lineari

- Passaggio da convoluzione a correlazione

$$\begin{aligned} I'(u, v) &= \sum_{(i,j) \in R_H} I(u-i, v-j) \cdot H(i, j) \\ &= \sum_{(i,j) \in R_H} I(u+i, v+j) \cdot H(-i, -j) \\ &= \sum_{(i,j) \in R_H} I(u+i, v+j) \cdot H^*(i, j). \end{aligned}$$

Convoluzione

- La convoluzione è la formulazione con cui si cerca di caratterizzare la risposta di un sistema (funzione di trasferimento)
- Nella teoria 'lineare' la funzione di trasferimento è la risposta del sistema ad uno stimolo impulsivo, lo stimolo più elementare che si può inviare all'input del sistema
- Nel caso di un sistema di imaging questo stimolo elementare è un fascio di luce, o altra informazione fisica, capace, in linea di principio, di accendere un solo pixel

Immagine come Mosaico

- Ogni pixel si accende in risposta ad allo stimolo che proviene da un dettaglio la cui dimensione reale è legata alla risoluzione dell'immagine
- Ognuno di questi dettagli è una sorgente elementare dell'immagine che non può essere ulteriormente risolto
- In un sistema ideale ogni sorgente elementare è in grado di "accendere" un solo pixel
- L'immagine complessiva emerge come la composizione dell'accensione *indipendente* di tutti i pixel da parte dagli stimoli provenienti da tutte le sorgenti nel campo di osservazione
- Sistemi di imaging reali deviano dal comportamento ideale.
- Se le deviazioni dal comportamento ideale si ripetono uguali, indipendentemente dalla posizione della sorgente nel campo di osservazione (e quindi indipendentemente dalla posizione del pixel che la rappresenta), allora è possibile utilizzare la forma convolutiva lineare per descrivere queste alterazioni

Immagine di una funzione δ

Per quanto possa apparire ovvio è importante avere presente che questa dovrebbe essere l'immagine che si forma quando la sorgente è sufficientemente puntiforme

- Un solo pixel si deve accendere
- Se sposto la sorgente nel campo di osservazione il pixel si deve spostare nell'immagine

Sistemi di imaging reali in generale deviano dal comportamento ideale.

- In un'ampia classe di deviazioni dal comportamento ideale le alterazioni introdotte dal sistema possono essere caratterizzate dalla convoluzione di una immagine/stimolo elementare (la funzione δ) con una matrice H che le rappresenta.
- Il tema della *system identification* e della sua comprensione generale richiede competenze che esulano questo corso. Tuttavia è importante sapere che le alterazioni connaturate con un determinato sistema di imaging devono essere tenute in considerazione per interpretare le immagini

Azione di un filtro su una δ

- Prendiamo il caso di una matrice H che caratterizza la risposta di un sistema di imaging.
- Il caso qui schematizzato (figura in alto) non è reale: lo si intende solo a titolo di esemplificazione
- Gli elementi della matrice H sono stati resi con colori diversi così da distinguerli all'interno della matrice
- Il quadrato verde al centro è l'*hot spot* della matrice
- L'immagine in basso è lo stimolo elementare (funzione δ)

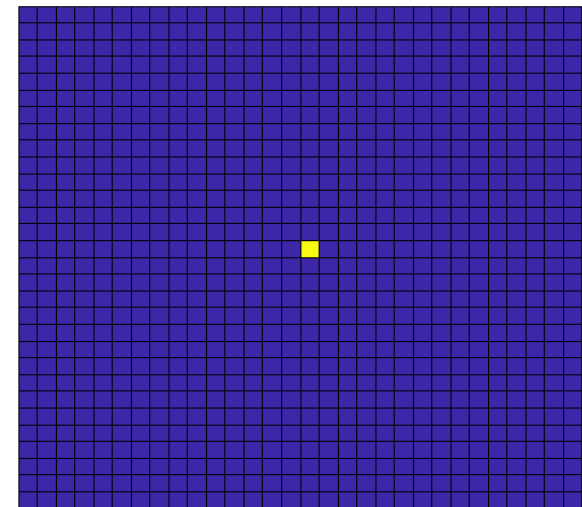
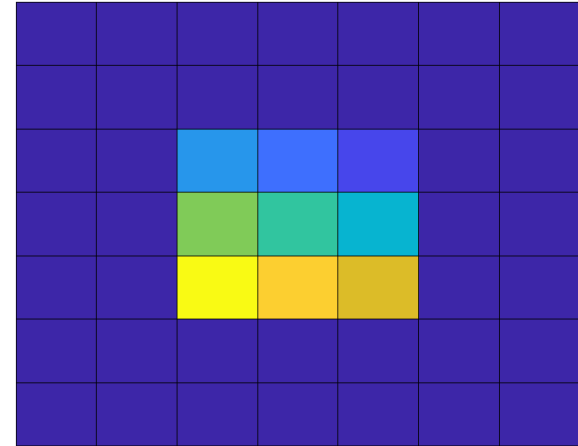
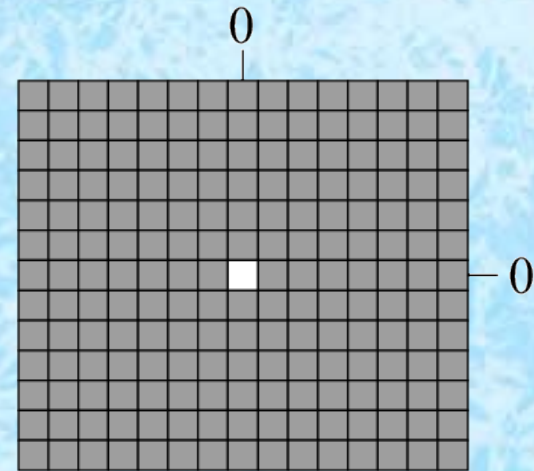
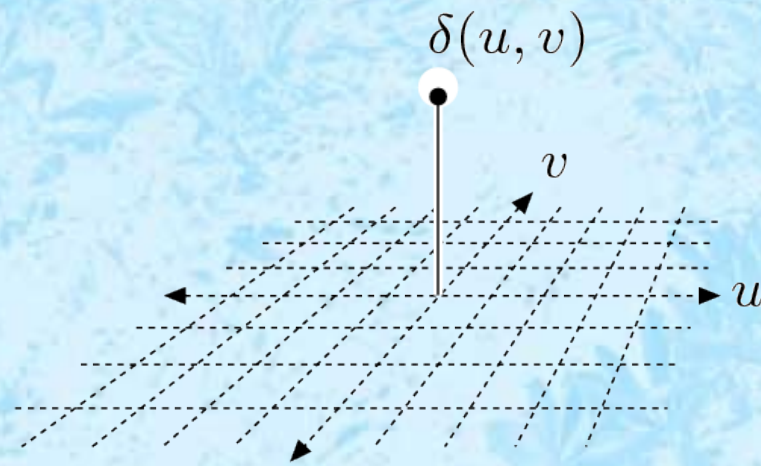
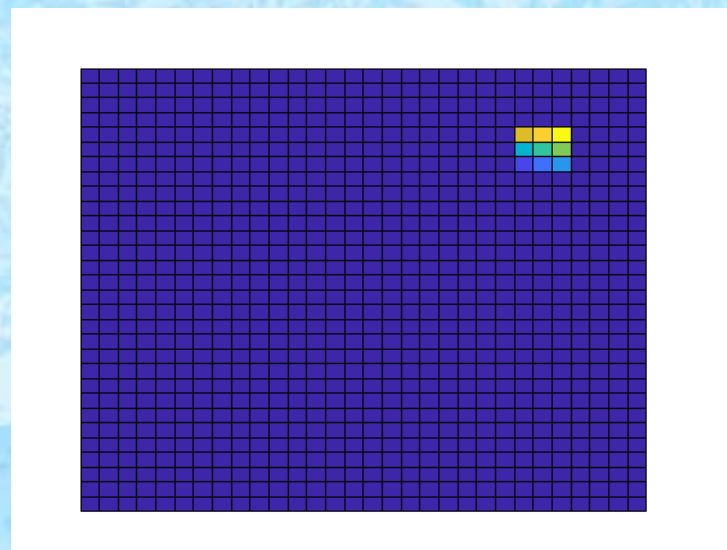
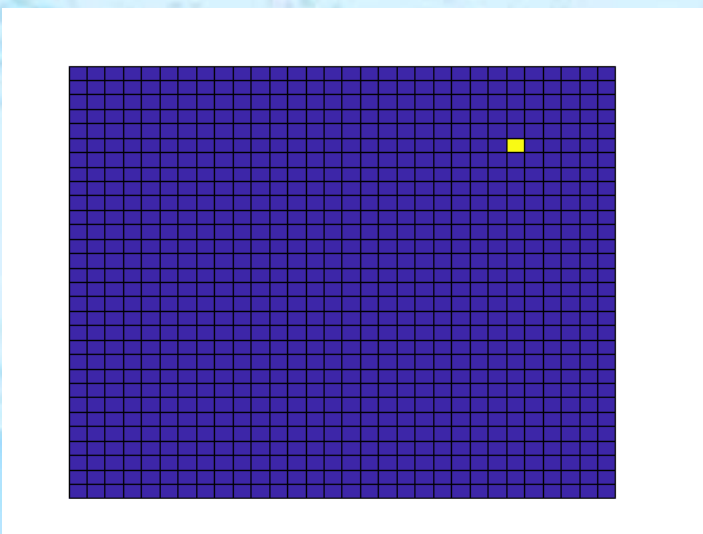
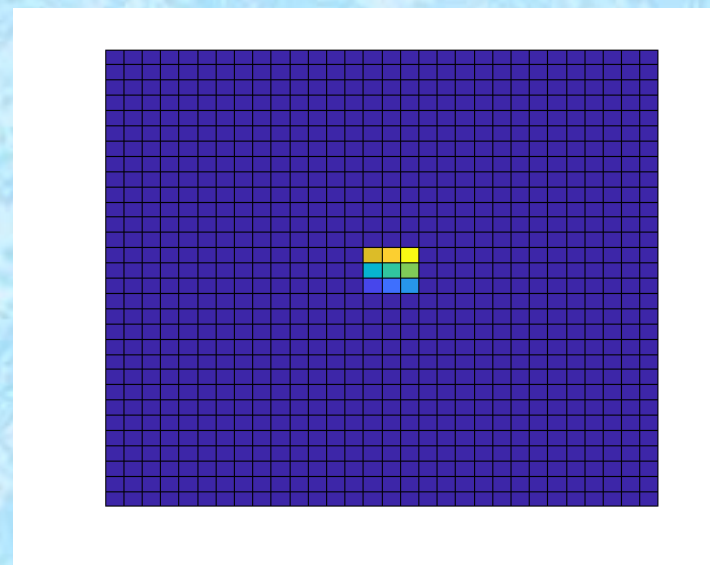
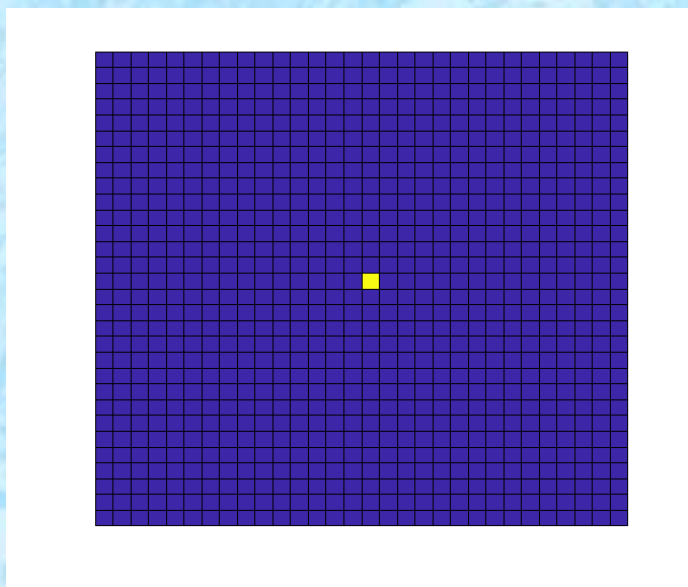


Immagine di una funzione δ

L'immagine della funzione (stimolo) elementare δ



Applicazione del filtro alla δ

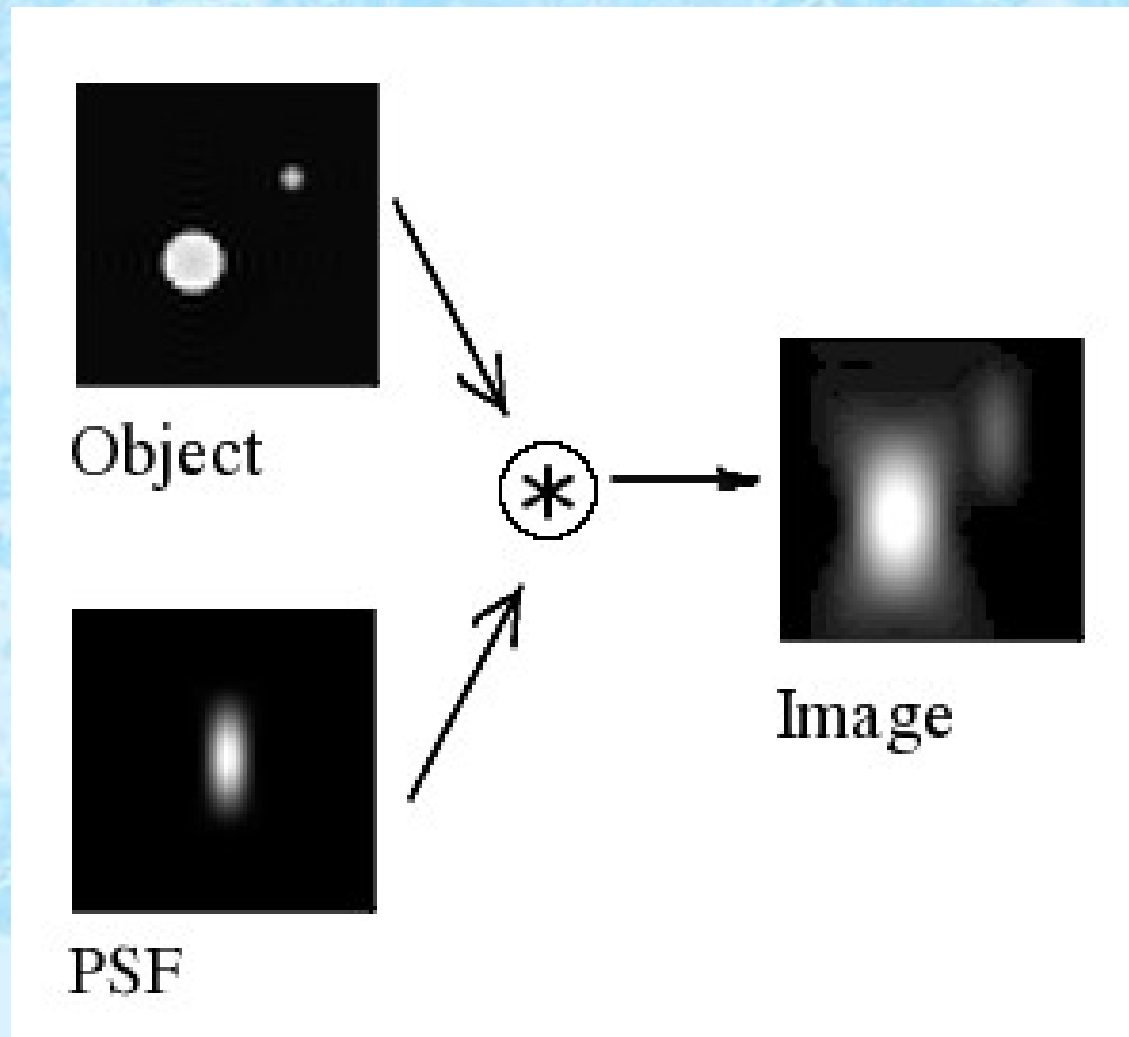


Point Spread Function

Riassumendo:

- In un sistema ‘reale’ di imaging in generale la risposta non conserva la forma dello stimolo elementare
- Le alterazioni rispetto al comportamento ideale sono rappresentate da una funzione lineare
- Questa funzione è la risposta è caratteristica del sistema di imaging viene chiamata Point Spread Function (PSF)

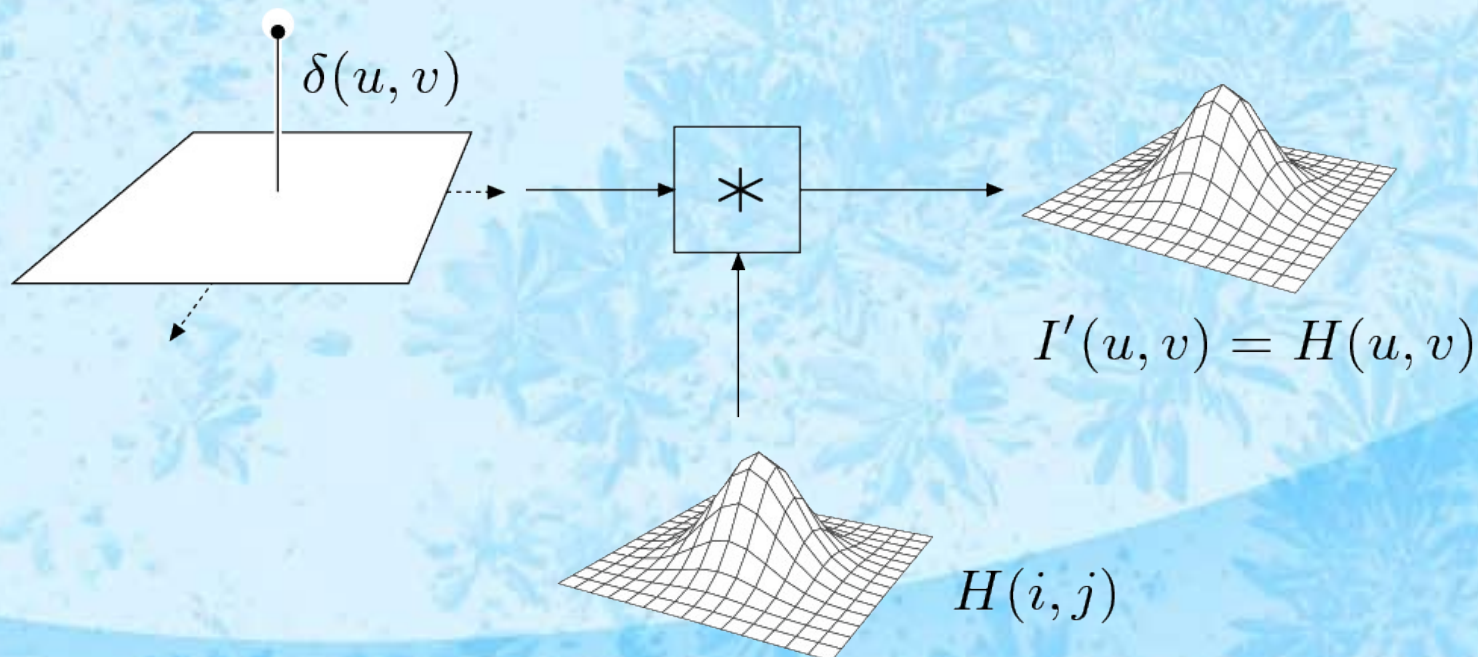
Point Spread Function



Determinazione della PSF

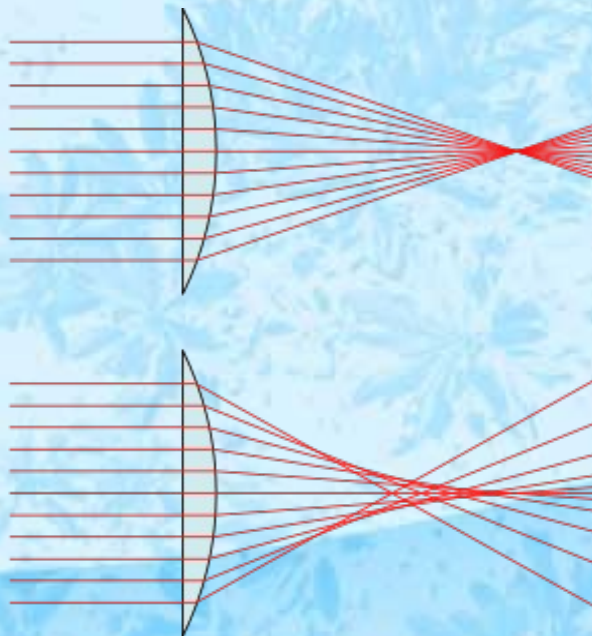
Lo studio della PSF apre alla possibilità della de-convoluzione della stessa e, almeno in linea di principio, della riduzione delle alterazioni introdotte

In ogni caso è importante tenere conto della PSF per interpretare correttamente immagini dove l'azione della PSF può alterare in modo sostanziale l'aspetto di alcuni dettagli



Esempio di PSF

- L'aberrazione sferica è un difetto di lenti e specchi con una superficie sferica.
- Nell'immagine viene paragonato il comportamento ideale da quello reale di una lente sferica.
- Nella immagine il comportamento ideale di una lente che rifrange i raggi di luce convogliati in un unico punto viene confrontato con una lente che introduce un'aberrazione deviando i raggi lontani dall'asse ottico in modo maggiore rispetto al desiderato



Aberrazione Sferica

Nell'immagine vengono confrontate le immagini per 3 sistemi che hanno aberrazione negativa (riga in alto) che positiva (riga in basso). La riga centrale rappresenta aberrazione nulla.

La colonna centrale è l'immagine a fuoco, mentre le colonne a destra e sinistra sono immagini ottenute uscendo dal fuoco

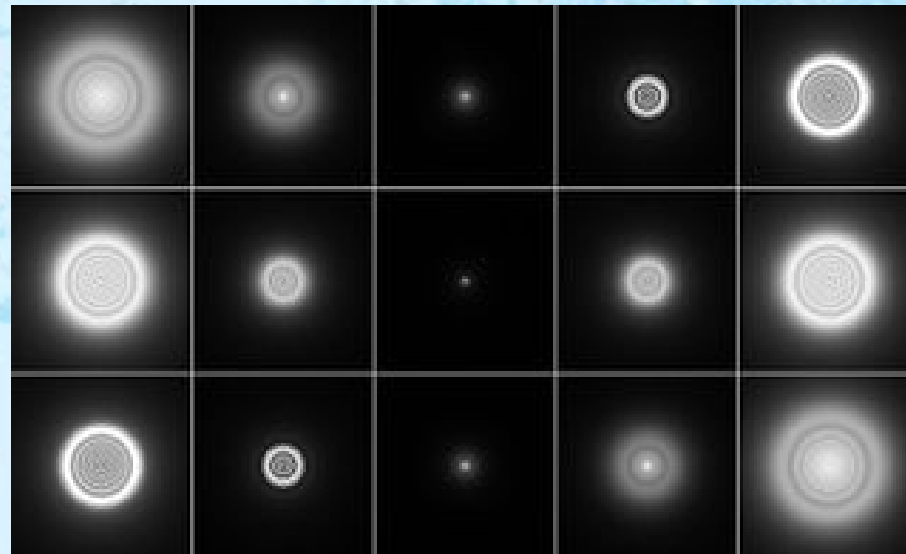


Immagine di stelle al telescopio



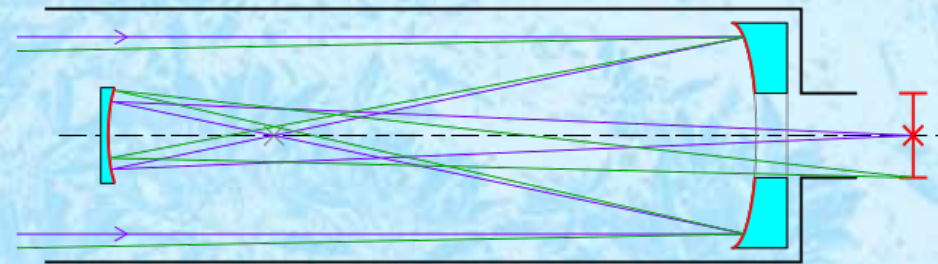
Immagine di Stelle al telescopio

L'immagine precedente è stata presa con un telescopio riflettore

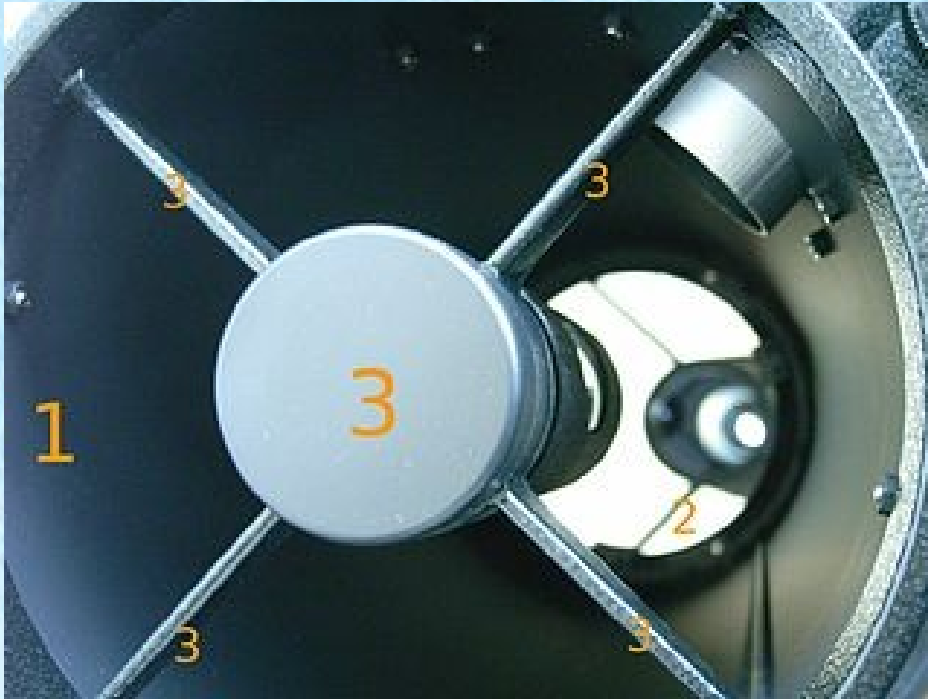
Il telescopio riflettore usa uno specchio curvo per raccogliere luce e indirizzarla verso un secondo specchio che convoglia la luce verso un gruppo ottico per la formazione dell'immagine

Le stelle sono oggetti distanti e quasi puntiformi. Sono quindi un'ottima approssimazione di una funzione δ

Nell'immagine ogni stella mostra una tipica alterazione dal comportamento ideale di oggetto quasi puntiforme.



Telescopio riflettore



Ogni stella della foto al telescopio mostra un alone e una sorta di croce luminosa che si ripetono.

In particolare la croce luminosa è costituita dalle *diffraction spikes* generate dall'ombra dei supporti dello specchio secondario proiettata sullo specchio riflettente primario.

Questo effetto è strutturale del telescopio e quindi è parte della sua PSF